第26卷 第6期　工 程 数 学 学 报　Vol. 26 No. 6
2009年12月　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1033-06

伪抛物型积分微分方程的混合有限元误差估计*

车海涛

(山东省潍坊学院数学与信息科学学院，潍坊 261061)

摘　要: 基于Raviart-Thomas空间，本文对伪抛物型积分微分方程初边值问题提出了混合有限元方法。与通常的有限元方法相比，该方法可以同时高精度逼近未知函数及未知函数的梯度。通过引入广义混合椭圆投影，证明了其存在唯一性，并得到了其一系列性质，利用其性质给出了平方模范数下的最优误差估计；利用广义混合椭圆投影和正则Green函数得到了最大模范数下的拟最优误差估计。

关键词: 伪抛物型积分微分方程；混合有限元方法；误差估计

分类号: **AMS**(2000) 65M12; 65M15　　**中图分类号**: O241.8　　**文献标识码**: A

1　引言

令Ω是$\mathbf{R}^2$中具有Lipschitz连续边界$\partial\Omega$的有界区域，对固定的满足$0<T<\infty$的T，我们考虑如下的伪抛物型积分微分方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{div}\big(a \bigtriangledown u_t + b_1 \bigtriangledown u + \int_0^t b_2 \bigtriangledown u \mathrm{d}\tau\big) + f, & (x,t)\in\Omega\times[0,T], \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

的混合元方法，其中函数$a(x,t)$，$b_1(x,t)$，$b_2(x,t)$以及它们的导数光滑有界且满足$0<c_0\leq a(x,t)\leq c_1$，并假设对于任意的$f\in C^1(0,T;L^2(\Omega))$，$u_0\in H^s(\Omega)$，($s$是一固定常数)，问题(1)都是唯一可解的。

令

$$\mathbf{p} = -a\nabla u_t - b_1\nabla u - \int_0^t b_2\nabla u \mathrm{d}\tau,$$

并设

$$\alpha(x,t)=a^{-1}(x,t),\quad b(x,t)=\alpha(x,t)b_1(x,t),\quad c(x,t,\tau)=\alpha(x,t)b_2(x,t,\tau),$$

$$\beta(x,t)=-\nabla b(x,t),\quad \gamma(x,t,\tau)=-\nabla c(x,t,\tau),$$

收稿日期: 2007-11-14.　**作者简介**: 车海涛(1980年1月生)，男，硕士，讲师. 研究方向：偏微分方程数值解.

***基金项目**: 潍坊学院自然科学基金(2008Z22).

则问题 (1) 可写成如下的混合一阶系统

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{div}\mathbf{p} = f, & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ \alpha\mathbf{p} + \nabla u_t + \nabla(bu) + \boldsymbol{\beta} u + \int_0^t \nabla(cu)\mathrm{d}\tau + \int_0^t \boldsymbol{\gamma} u\mathrm{d}\tau = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(0) = u_0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

注意到 $u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$，意味着 $u_t(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$。

定义空间

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^n; \mathrm{div}\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}, \quad W = L^2(\Omega),$$

其中 $\mathbf{V}$ 的模为 $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{v}}^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|^2$。则 (2) 的弱形式为：求解 $\{\mathbf{p},u\} : [0,t] \to \mathbf{V} \times W$，使得

$$\begin{cases} (u_t,w) + (\mathrm{div}\mathbf{p},w) = (f,w), & \forall\, w \in W, \quad 0 < t \leq T, \\ (\alpha\mathbf{p},\mathbf{v}) - \big(u_t + bu + \int_0^t cu\mathrm{d}\tau, \mathrm{div}\mathbf{v}\big) & \\ \quad + \big(\boldsymbol{\beta} u + \int_0^t \boldsymbol{\gamma} u\mathrm{d}\tau, \mathbf{v}\big) = 0, & \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad 0 < t \leq T, \\ (u(0),w) = (u_0,w), & \forall\, w \in W. \end{cases} \tag{3}$$

为了定义 $\{\mathbf{p},u\}$ 的一个适当的有限元逼近过程，考虑将 Ω 剖分成三角形单元的拟一致部分 T_h (其单元直径不大于 $h(0 < h < 1)$) 相联系的有限维子空间 $V_h \times W_h$，其中 $V_h \times W_h \subset V \times W$, T_h 的边界单元允许有一条边是曲的。我们选择 $V_h \times W_h$ 为 Raviart-Thomas 空间[2-4]，其指标 $k \geq 0$。引进 L^2 投影 $p_h : W \to W_h$ 和 Raviart-Thomas 投影 $\Pi_h : H^1(\Omega)^2 \to V_h$，且具有交换性质 $\mathrm{div} \circ \Pi_h = p_h \circ \mathrm{div} : H^1(\Omega)^2 \to W_h$。

方程 (3) 的关于时间连续的混合有限元逼近为：求 $\{\mathbf{p}_h,u_h\} \to V_h \times W_h$，使得

$$\begin{cases} (u_{h,t},w) + (\mathrm{div}\mathbf{p}_h,w) = (f,w), & \forall\, w \in W_h, \quad 0 < t \leq T, \\ (\alpha\mathbf{p}_h,\mathbf{v}) - \big(u_{h,t} + bu_h + \int_0^t cu_h\mathrm{d}\tau, \mathrm{div}\mathbf{v}\big) & \\ \quad + \big(\boldsymbol{\beta} u_h + \int_0^t \boldsymbol{\gamma} u_h\mathrm{d}\tau, \mathbf{v}\big) = 0, & \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \quad 0 < t \leq T, \\ (u_h(0),w) = (u_0,w), & \forall\, w \in W_h, \end{cases} \tag{4}$$

且 (4) 式的解存在唯一。

本文余下部分安排如下：在第 2 节将讨论与 (3) 式相联系的广义混合椭圆投影的性质；在第 3 节将展示本文的主要结果。

2 广义混合椭圆投影

引入与 (3) 式有关的广义混合椭圆投影 $\{\widetilde{\mathbf{p}}_h,\widetilde{u}_h\} : [0,T] \to V_h \times W_h$，使得

$$\begin{cases} (\mathrm{div}(\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}_h),w) = 0, \quad \forall\, w \in W_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (\alpha(\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}_h),\mathbf{v}) - \big((u_t - \widetilde{u}_{h,t}) + b(u - \widetilde{u}_h) + \int_0^t c(u - \widetilde{u}_h)\mathrm{d}\tau, \mathrm{div}\mathbf{v}\big) \\ \quad + \big(\boldsymbol{\beta}(u - \widetilde{u}_h) + \int_0^t \boldsymbol{\gamma}(u - \widetilde{u}_h)\mathrm{d}\tau, \mathbf{v}\big) = 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V_h, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (u_0 - \widetilde{u}_h(0),w) = 0, \quad \forall\, w \in W_h. \end{cases} \tag{5}$$

且(5)的解存在唯一。

令$\mathbf{p}_1=\mathbf{p}-\widetilde{\mathbf{p}}_h$，$u_1=p_hu-\widetilde{u}_h$，$u_2=u-p_hu$。则(5)式可变为

$$\begin{cases}(\mathrm{div}\mathbf{p}_1,w)=0, \quad \forall\, w\in w_h, \quad 0<t\le T,\\ (\alpha\mathbf{p}_1,\mathbf{v})-\Big(u_{1,t}+b(u_1+u_2)+\int_0^t c(u_1+u_2)\mathrm{d}\tau,\mathrm{div}\mathbf{v}\Big)\\ \quad+\Big(\boldsymbol{\beta}(u_1+u_2)+\int_0^t\boldsymbol{\gamma}(u_1+u_2)\mathrm{d}\tau,\mathbf{v}\Big)=0, \quad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{V}_h, \quad 0<t\le T,\\ (u_1(0),w)=0, \quad \forall\, w\in w_h.\end{cases} \tag{6}$$

引理2.1 若$\{\mathbf{p}_1,u_1\}$满足关系式(6)，且假定Ω是2-正则(2-正则性的定义见文献[2])，则对所有的$0\le t\le T$，存在不依赖于h和t的常数$C>0$，使得

$$\|u_1\|\le C\int_0^t(h\|\mathbf{p}_1\|+h^{2-\delta_{k0}}\|\mathrm{div}\mathbf{p}_1\|+h\|u_2\|+\|u_2\|_{-1})\mathrm{d}\tau,$$

$$\|u_{1,t}\|\le C\Big(h\|\mathbf{p}_1\|+h\|u_2\|+\|u_2\|_{-1}+h^{2-\delta_{k0}}\|\mathrm{div}\mathbf{p}_1\|$$
$$+\int_0^t(h\|\mathbf{p}_1\|+h^{2-\delta_{k0}}\|\mathrm{div}\mathbf{p}_1\|+h\|u_2\|+\|u_2\|_{-1})\mathrm{d}\tau\Big),$$

其中当$k=0$时，$\delta_{k_0}=1$；当$k\ge 1$时，$\delta_{k_0}=0$。

引理2.2 令$\{\mathbf{p},u\}$和$\{\widetilde{\mathbf{p}}_h,\widetilde{u}_h\}$分别是(3)和(5)的解。假设$\{\mathbf{p},u\}$充分光滑且$\Omega$是2-正则，则对$0<t\le T$，存在不依赖于$h$和$t$的常数$C>0$，使得$k\ge 0$，且

$$\|\mathrm{div}(\mathbf{p}-\widetilde{\mathbf{p}}_h)\|\le Ch^r\|\mathbf{p}\|_{r+1}, \quad 0\le r\le k+1,$$

$$\|p_hu-\widetilde{u}_h\|\le Ch^{r+1-\delta_{k0}}\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_r+\|u\|_r)\mathrm{d}\tau, \quad 1\le r\le k+1,$$

$$\|p_hu_t-\widetilde{u}_{h,t}\|\le Ch^{r+1-\delta_{k0}}\Big\{\|u\|_r+\|\mathbf{p}\|_r+\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_r+\|u\|_r)\mathrm{d}\tau\Big\}, \quad 1\le r\le k+1.$$

1) 当$k=0$时，

$$\|\mathbf{p}-\widetilde{\mathbf{p}}_h\|\le Ch\Big\{\|\mathbf{p}\|_1+\|u\|_1+\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_1+\|u\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u-\widetilde{u}_h\|\le Ch\Big\{\|u\|_1+\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_1+\|u\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t-\widetilde{u}_{h,t}\|\le Ch\Big\{\|u\|_1+\|\mathbf{p}\|_1+\|u_t\|_1+\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_1+\|u\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

2) 当$k\ge 1$，$2\le r\le k+1$时，

$$\|\mathbf{p}-\widetilde{\mathbf{p}}_h\|\le Ch^r\Big\{\|\mathbf{p}\|_r+\|u\|_r+\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_{r-1}+\|u\|_{r-1})\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u-\widetilde{u}_h\|\le Ch^r\Big\{\|u\|_r+\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_{r-1}+\|u\|_{r-1})\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t-\widetilde{u}_{h,t}\|\le Ch^r\Big\{\|u\|_r+\|\mathbf{p}\|_{r-1}+\|u_t\|_{r-1}+\int_0^t(\|\mathbf{p}\|_{r-1}+\|u\|_{r-1})\mathrm{d}\tau\Big\}.$$

下面考虑 $\{\widetilde{\mathbf{p}}_h, \widetilde{u}_h\}$ 的 $L^\infty(L^\infty)$ 误差估计。引入如下定义的正则 Green函数[4]

$$\begin{cases} G_1 + \nabla\lambda_1 = 0, & x \in \Omega, \\ \mathrm{div} G_1 = \delta_1^h, & x \in \Omega, \\ \lambda_1 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{和} \qquad \begin{cases} \alpha G_2 + \nabla\lambda_2 = \delta_2^h, & x \in \Omega, \\ \mathrm{div} G_2 = 0, & x \in \Omega, \\ \lambda_2 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 δ_1^h, δ_2^h 是 $\mathbf{z} \in \Omega$ 的 Dirac 函数，且满足

$$(w, \delta_1^h) = w(\mathbf{z}), \quad \forall\, w \in W_h, \qquad (\mathbf{v}, \delta_2^h) = v(\mathbf{z}), \quad \forall\, \mathbf{v} \in v_h.$$

对于 $\mathbf{z}$ 有如下不等式[4]

$$\|w\|_{0,\infty} \le 2|(w, \delta_1^h)|, \quad \|\mathbf{v}\|_{0,\infty} \le 2|(\mathbf{v}, \delta_2^h)|.$$

令 $\{G_1^h, \lambda_1^h\} \in V_h \times W_h$ 是 $\{G_1, \lambda_1\}$ 的混合有限元逼近，$\{G_2^h, \lambda_2^h\} \in V_h \times W_h$ 是 $\{G_2, \lambda_2\}$ 的混合有限元逼近。由文献 [4] 和 [5]，我们得到

$$\|\lambda_2^h\| + \|G_1^h\| \le C|\ln h|^{\frac{1}{2}}, \quad \|G_2^h\|_{0,1} \le C|\ln h|.$$

引理2.3 在引理2.1的条件下，对 $0 < t \le T$ 和 $0 < h < \frac{1}{3}$，则存在不依赖于 h 和 t 的常数 $C > 0$，使得

1) 当 $k = 0$ 时，

$$\|u - \widetilde{u}_h\|_{0,\infty} \le Ch|\ln h|^{\frac{1}{2}}\Big\{\|u\|_{1,\infty} + \int_0^t (\|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t - \widetilde{u}_{h,t}\|_{0,\infty} \le Ch|\ln h|^{\frac{1}{2}}\Big\{\|u_t\|_{1,\infty} + \|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1 + \int_0^t (\|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}_h\|_{0,\infty} \le Ch|\ln h|^{\frac{3}{2}}\Big\{\|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_{1,\infty} + \int_0^t (\|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\};$$

2) 当 $k \ge 1$, $2 \le r \le k + 1$ 时，

$$\|u - \widetilde{u}_h\|_{0,\infty} \le Ch^r\Big\{\|u\|_{r,\infty} + \int_0^t (\|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t - \widetilde{u}_{h,t}\|_{0,\infty} \le Ch^r\Big\{\|u_t\|_{r,\infty} + \|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r + \int_0^t (\|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathbf{p} - \widetilde{\mathbf{p}}_h\|_{0,\infty} \le Ch^r|\ln h|\Big\{\|u\|_{r,\infty} + \|\mathbf{p}\|_{r,\infty} + \int_0^t (\|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r)\mathrm{d}\tau\Big\}.$$

3 连续时间的混合有限元逼近

首先利用广义混合椭圆投影 $\{\widetilde{\mathbf{p}}_h, \widetilde{u}_h\}$ 得到 $\{\mathbf{p}_h, u_h\}$ 的最优 L^2 误差估计，然后利用投影 $\{\widetilde{\mathbf{p}}_h, \widetilde{u}_h\}$ 和正则 Green 函数得到 $\{\mathbf{p}_h, u_h\}$ 的拟最优 L^∞ 误差估计。

定理3.1 令 $\{\mathbf{p}, u\}$ 和 $\{\mathbf{p}_h, u_h\}$ 分别是弱形式 (3) 和离散形式 (4) 的解，假设 $\mathbf{p}$, u, u_t 充分光滑，Ω 是2-正则，则对 $0 < t \le T$，存在不依赖于 h 和 t 的常数 $C > 0$，使得

1) 当$k=0$时，

$$\|u-u_h\| \le Ch\Big\{\|u\|_1 + \int_0^t (\|u_t\|_1 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|u\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t-u_{h,t}\| \le Ch\Big\{\|u\|_1 + \|u_t\|_1 + \|\mathbf{p}\|_1 + \int_0^t (\|u_t\|_1 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|u\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_h\| \le Ch\Big\{\|u\|_1 + \|u_t\|_1 + \|\mathbf{p}\|_1 + \int_0^t (\|u_t\|_1 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|u\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathrm{div}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_h)\| \le Ch\Big\{\|u\|_1 + \|u_t\|_1 + \|\mathbf{p}\|_2 + \int_0^t (\|u_t\|_1 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|u\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\};$$

2) 当$k \ge 1$，$2 \le r \le k+1$时，

$$\|u-u_h\| \le Ch^r\Big\{\|u\|_r + \int_0^t (\|u_t\|_r + \|\mathbf{p}\|_{r-1} + \|u\|_{r-1})\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t-u_{h,t}\| \le Ch^r\Big\{\|u\|_{r-1} + \|u_t\|_r + \|\mathbf{p}\|_{r-1} + \int_0^t (\|u_t\|_r + \|\mathbf{p}\|_{r-1} + \|u\|_{r-1})\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_h\| \le Ch^r\Big\{\|u\|_{r-1} + \|u_t\|_r + \|\mathbf{p}\|_{r-1} + \int_0^t (\|u_t\|_r + \|\mathbf{p}\|_{r-1} + \|u\|_{r-1})\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathrm{div}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_h)\| \le Ch^r\Big\{\|u\|_{r-1} + \|u_t\|_r + \|\mathbf{p}\|_{r+1} + \int_0^t (\|u_t\|_r + \|\mathbf{p}\|_r + \|u\|_{r-1})\mathrm{d}\tau\Big\}.$$

定理3.2 在定理3.1的条件下，对$0 < t \le T$和$0 < h < \frac{1}{3}$，则存在不依赖于h和t的常数$C > 0$，使得

1) 当$k=0$时，

$$\|u-u_h\|_{0,\infty} \le Ch|\ln h|^{\frac{1}{2}}\Big\{\|u\|_{1,\infty} + \int_0^t (\|u_t\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1 + \|u\|_{1,\infty})\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t-u_{h,t}\|_{0,\infty} \le Ch|\ln h|^{\frac{1}{2}}\Big\{\|u_t\|_{1,\infty} + \|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1 + \int_0^t (\|u_t\|_1 + \|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_h\|_{0,\infty} \le Ch|\ln h|^{\frac{3}{2}}\Big\{\|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_{1,\infty} + \int_0^t (\|u_t\|_1 + \|u\|_{1,\infty} + \|\mathbf{p}\|_1)\mathrm{d}\tau\Big\}.$$

2) 当$k \ge 1$，$2 \le r \le k+1$时，得到

$$\|u-u_h\|_{0,\infty} \le Ch^r|\ln h|^{\frac{1}{2}}\Big\{\|u\|_{r,\infty} + \int_0^t (\|u_t\|_{1,\infty} + \|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|u_t-u_{h,t}\|_{0,\infty} \le Ch^r|\ln h|^{\frac{1}{2}}\Big\{\|u_t\|_{r,\infty} + \|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r + \int_0^t (\|u_t\|_{1,\infty} + \|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r)\mathrm{d}\tau\Big\},$$

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_h\|_{0,\infty} \le Ch^r|\ln h|^{\frac{3}{2}}\Big\{\|u\|_{r,\infty} + \|\mathbf{p}\|_{r,\infty} + \int_0^t (\|u_t\|_{1,\infty} + \|u\|_r + \|\mathbf{p}\|_r)\mathrm{d}\tau\Big\}.$$

参考文献：

[1] Jiang Z W. $L^\infty(L^2)$ and $L^\infty(L^\infty)$ Error estimates for mixed methods for integro-differential equations of parabolic type[J]. Math Model Numer Anal, 1999, 33: 531-546

[2] Maria Noelle Le Roux, Vidar Thomee. Numerical solution of semilinear integro-differential equations of parabolic type with nonsmooth data[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, 26: 1291-1309

[3] Mliner F A, Park E J. Mixed finite element method for strongly nonlinear second order elliptic problem[J]. Math Com, 1995, 64: 973-988

[4] Raviart P A, Thomas J M. A mixed finite element method for second order elliptic problem[C]// Lecture Notes in Math 606, Brelin: Springer, 1977: 292-315

[5] Greenwell-Yanik E, Fairweather G. Finite element methods for parabolic and hyperbolic partial integro-differential equations[J]. Nonlinear Anual, 1988, 12: 785-809

Error Estimates for Mixed Finite Element Methods for Pseudo-parabolic Intergo-differential Equations

CHE Hai-tao

(College of Mathematics and Information Science, Weifang University, Weifang 261061)

Abstract: In this paper, a mixed finite element method is proposed to solve the initial-boundary value problem of pseudo-parabolic integro-differential equations. Compared with the usual finite element method, the unknown scalar and the adjoint vector function are approximated optimally and simultaneously. By introducing the projection of generalized mixed element, the existence and uniqueness of projection and some important properties of the projection are proved. By using its properties, the optimal order error estimates in square norm are derived; By using the projection of generalized mixed element and the regular Green function, quasi-optimal order error estimates in maximal norm are finally obtained .

Keywords: pseudo-parabolic intergo-differential equation; mixed finite element method; error estimate